

A large, light blue, stylized letter 'S' is positioned vertically on the left side of the cover, partially overlapping a dark blue vertical bar.

Roberto Capone,  
Cristina Coppola,  
Umberto Dello Iacono,  
Francesco Saverio Tortoriello

# Competenze matematiche in una dimensione europea

Il progetto  
*Numero ergo sum*

A large, light blue, stylized letter 'F' is positioned vertically on the right side of the cover, partially overlapping a dark blue vertical bar.

S C I E N Z E  
D E L L A  
FORMAZIONE

FrancoAngeli

## Informazioni per il lettore

Questo file PDF è una versione gratuita di sole 20 pagine ed è leggibile con



La versione completa dell'e-book (a pagamento) è leggibile con Adobe Digital Editions. Per tutte le informazioni sulle condizioni dei nostri e-book (con quali dispositivi leggerli e quali funzioni sono consentite) consulta [cliccando qui](#) le nostre F.A.Q.





I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: [www.francoangeli.it](http://www.francoangeli.it) e iscriversi nella home page al servizio “Informatemi” per ricevere via e.mail le segnalazioni delle novità.

Roberto Capone,  
Cristina Coppola,  
Umberto Dello Iacono,  
Francesco Saverio Tortoriello

# **Competenze matematiche in una dimensione europea**

**Il progetto**  
*Numero ergo sum*

**FrancoAngeli**

Pubblicazione realizzata nell'ambito del progetto: “*Numero ergo sum*: Competenze matematiche in una dimensione europea” – CUP: D23G1500023002 – Cod. Uff. 10 – Cod. SMILE FSE/SOMOL SI 1 3286.



Copyright © 2017 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy.

*L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore. L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito [www.francoangeli.it](http://www.francoangeli.it).*

# Indice

<b>Premessa</b> , di <i>Roberto Capone</i> , <i>Cristina Coppola</i> , <i>Umberto Dello Iacono</i> , <i>Francesco Saverio Tortoriello</i>	pag. 7
<b>1. Il progetto</b> , di <i>Roberto Capone</i> , <i>Cristina Coppola</i> , <i>Umberto Dello Iacono</i> , <i>Vincenzo Pezzulo</i> , <i>Francesco Saverio Tortoriello</i>	» 11
1. Come nasce il progetto	» 11
2. Il background	» 13
3. Finalità e obiettivi	» 14
4. La cornice teorica di riferimento del progetto	» 16
5. La domanda guida	» 29
6. Articolazione dell'intervento e fasi del progetto	» 29
<b>2. Analisi di alcune prove OCSE-PISA per la matematica</b> , di <i>Umberto Dello Iacono</i>	» 37
1. Triangoli	» 37
2. Caramelle colorate	» 42

3. Esportazioni	pag. 47
4. Risultati di una verifica	» 56
5. Rifiuti	» 62
Conclusioni	» 68
<b>3. Le attività</b> , di <i>Gemma Carotenuto,</i> <i>Cristina Coppola, Umberto Dello Iacono,</i> <i>Tiziana Pacelli</i>	» 69
1. La strategia	» 69
2. Prima delle attività	» 70
3. Le attività	» 71
<b>Bibliografia</b>	» 131
<b>Allegati</b>	» 135



## Premessa

*di Roberto Capone, Cristina Coppola,  
Umberto Dello Iacono, Francesco Saverio Tortoriello*

Scopo del presente libro è quello di descrivere le attività sviluppate nell'ambito del progetto europeo *Numero ergo sum: competenze matematiche in una dimensione europea*, curato dal gruppo di ricerca in Didattica della matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno.

Il progetto non è stato finalizzato alla valutazione degli studenti ma, piuttosto, sia allo sviluppo di competenze in matematica, attraverso la creazione di specifiche attività (obiettivo educativo) sia all'analisi dei processi sottesi a queste attività (obiettivo di ricerca).

Nel progetto sono stati coinvolti circa 400 studenti quindicenni provenienti da dodici istituti campani scelti in modo eterogeneo tra tecnici, professionali, licei psico-pedagogici, licei classici e scientifici al fine di individuare anche specifiche problematiche didattiche legate all'istituto di appartenenza degli studenti coinvolti.

Alla realizzazione hanno inoltre contribuito in maniera significativa e collaborativa, i docenti interni alle scuole individuate; numerosi infatti sono stati gli incontri tra i ricercatori e i docenti delle scuole coinvolte per l'analisi e la verifica delle procedure e delle attività didattiche man mano svolte.

Il quadro teorico che ha ispirato le attività è stato quello di OCSE-PISA 2012 e 2015, in particolare sulle competenze di rappresentazione e comunicazione. Il progetto è stato inquadrato nel contesto delle ricerche che vedono il linguaggio come costruttore di significati e su studi che mostrano come alcune difficoltà di apprendimento in matematica possano essere attribuite a scarse competenze linguistiche e a difficoltà nella gestione e nel coordinamento di diversi registri semiotici; in particolare se le attività incentrate sulla gestione di diversi registri semiotici e sull'argomentazione possano influenzare l'acquisizione delle competenze di rappresentazione e comunicazione così come se il livello di competenza linguistica sia relazionabile agli errori nella gestione di diversi registri semiotici.

Pur non riportando l'analisi dei protocolli degli studenti, non oggetto di questo lavoro, da una loro prima osservazione è sembrato che siano emerse difficoltà nel passaggio tra i diversi registri semiotici, in particolare nel passare da un registro grafico o simbolico a un registro testuale e viceversa. Le argomentazioni scritte hanno confermato le difficoltà nel produrre testi da parte dello studente e ciò ha riguardato soprattutto quelli con scarse competenze linguistiche.

Nel corso dello sviluppo del progetto abbiamo evidenziato un miglioramento della capacità di comunicazione e argomentazione. Laddove inizialmente le argomentazioni non comparivano proprio, sono apparse in tutti i protocolli, durante il corso delle attività. È il caso, in particolare, di alcuni contesti classe in cui gli studenti partivano da situazioni di competenze linguistiche in generale molto basse, con nessuna abitudine alla scrittura in matematica e all'argomentazione in generale. Per le classi e i contesti in cui si riscontravano all'inizio maggiori competenze linguistiche,

si è potuto notare un processo di evoluzione verso argomentazioni progressivamente più complete e l'uso di un linguaggio via via più rigoroso dal punto di vista scientifico.



# 1. Il progetto

*di Roberto Capone, Cristina Coppola,  
Umberto Dello Iacono, Vincenzo Pezzulo,  
Francesco Saverio Tortoriello*

## 1. Come nasce il progetto

Il progetto *Numero ergo sum: competenze matematiche in una dimensione europea* nasce come risposta alle problematiche evidenziate dalle prove OCSE-PISA di matematica, in particolare quelle del 2012, riguardo gli studenti dei primi anni delle scuole superiori della regione Campania.

PISA (*Programme for International Student Assessment*) è un'indagine promossa dall'OCSE<sup>1</sup> per valutare le competenze degli studenti quindicenni in matematica, scienze, lettura e problem solving.

Gli ambiti prevalenti di valutazione in PISA 2012 sono stati matematica e problem solving.

Il progetto rientra nel Piano di azione coesione, promosso dalla Regione Campania e dall'Ufficio scolastico regionale Campania (USR), e si connota come progetto di ricerca-azione nell'ambito della valutazione degli apprendimen-

<sup>1</sup> L'OCSE è l'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico, nata con l'obiettivo di affrontare le sfide economiche, sociali e ambientali dell'economia mondiale.

ti degli studenti campani in *numeracy*, ossia la *competenza matematica*, definita, nell'ambito di PISA 2012, come

la capacità di una persona di *formulare, utilizzare e interpretare* la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo (Quadro di riferimento PISA, 2012 per la matematica, p. 25).

Lavorare nella direzione di assicurare il raggiungimento di tale competenza è una questione fondamentale e prioritaria nell'ambito dell'educazione matematica:

Assicurare questa competenza è permettere lo sviluppo di quelle conoscenze e competenze matematiche necessarie all'integrazione e alla partecipazione attiva in una data società così come l'adattamento alle sue prevedibili evoluzioni (Artigue, 2011, p. 220).

L'USR Campania aveva già promosso, in collaborazione con alcuni atenei della Regione Campania, il progetto *OCSE-PISA 2015-Obiettivo 500*, con lo scopo di concorrere all'innalzamento delle competenze in matematica dei quindicenni campani. La Regione Campania ha inteso poi ampliare l'azione avviata dall'USR, attraverso il Piano di azione e coesione, III ed. ultima riprogrammazione (PAC III), per la missione strategica "Istruzione, formazione e competenze, priorità giovani".

Quest'idea ha visto coinvolti i dipartimenti di alcune università campane, che hanno attuato progetti di ricerca-azione, realizzati direttamente nelle (e in collaborazione

con le) istituzioni scolastiche di II grado, nell'ambito della valutazione degli apprendimenti degli studenti campani in *literacy* (competenze alfabetiche) e *numeracy*.

## 2. Il background

Il progetto *Numero ergo sum: competenze matematiche in una dimensione europea*, che si pone in continuità con il progetto OCSE-PISA 2015-Obiettivo 500, è stato sviluppato e implementato dal gruppo di ricerca in Didattica della matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Salerno, che vanta una consolidata tradizione di esperienze in merito alla realizzazione di azioni integrate per l'innalzamento delle competenze in matematica rivolte a studenti di vario ordine e grado. In particolare, tra le attività di ricerca portate avanti dal gruppo, assumono rilevanza quelle incentrate sui seguenti focus:

- importanza degli aspetti linguistici nella comprensione di concetti matematici e il ruolo delle diverse rappresentazioni semiotiche nei processi di apprendimento;
- analisi delle potenzialità della logica matematica per lo sviluppo di abilità dimostrative;
- rapporto tra linguaggio e sviluppo di abilità logiche e argomentative; sviluppo e ricerche nel campo delle didattiche disciplinari e nelle loro interazioni, allo scopo di migliorare l'insegnamento delle discipline scientifiche e umanistiche e la loro trasmissione in un'ottica di superamento tra le due culture.

Il progetto si colloca in continuità con le azioni di ricerca già avviate e consolidatesi anche a livello internazionale, attraverso la partecipazione a convegni e pubblicazioni su riviste sia nazionali sia internazionali.

In particolare, il gruppo di ricerca ha lavorato ai seguenti progetti:

- progetto *OCSE-PISA 2015-Obiettivo 500* (già descritto in precedenza);
- progetto *Laboratorio di multimedialità e didattica in matematica facile*, proposto dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Salerno in convenzione con MIUR-USR per la Campania;
- progetto *Artefatti e percorsi didattici per lo sviluppo della cultura matematica*, finanziato dal MIUR (legge 6/2000, Iniziative per la diffusione della cultura scientifica). Nell'ambito del progetto è stato creato, presso il Dipartimento di Matematica, il Museo-laboratorio di Didattica della matematica (in collaborazione con la Mathesis di Avellino e di Salerno e con la sede di Avellino del Museo per la matematica "Il Giardino di Archimede") diventato punto di riferimento per molti insegnanti campani;
- progetto *Liceo matematico*. Si tratta di un progetto di ricerca interdisciplinare che ha come *leitmotiv* il superamento epistemologico della parcellizzazione delle discipline; è tuttora in fase di attuazione e, coinvolgendo 24 classi di licei scientifici campani, sta avendo larga eco su tutto il territorio nazionale.

### **3. Finalità e obiettivi**

Lo scopo del progetto è stato supportare lo sviluppo di competenze in matematica, attraverso la creazione di opportune attività, e riflettere sui processi sottostanti lo svolgimento di queste attività.

Per quanto riguarda gli obiettivi specifici dell'intervento didattico che il progetto si è posto, in termini di risultati attesi, essi possono essere riassunti nei seguenti punti:



- innalzamento dei livelli di apprendimento nell'area delle competenze chiave;
- potenziamento negli allievi dell'interesse e della passione per la matematica e le sue applicazioni;
- potenziamento della capacità di trasferire le conoscenze e competenze acquisite, in altri contesti disciplinari o in attività concrete della vita quotidiana;
- incremento della motivazione all'apprendimento della matematica, della capacità di autovalutarsi e auto-orientarsi;
- comprensione del ruolo che la matematica gioca nel mondo reale;
- capacità di operare valutazioni fondate, di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.

In termini di recupero delle competenze di base, coerentemente con le indicazioni OCSE–PISA, gli obiettivi specifici dell'intervento didattico che il progetto si è posto possono essere riassunti nei seguenti punti:

- utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica;
- confrontare e analizzare figure geometriche individuando invarianti e relazioni;
- individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi;
- analizzare i dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

## 4. La cornice teorica di riferimento del progetto

Il progetto è stato inteso come un insieme strutturato di attività volte alla costruzione dei significati degli oggetti matematici e al potenziamento delle competenze linguistiche per supportare la comprensione dei concetti matematici.

La cornice teorica all'interno della quale è stato concepito e sviluppato il progetto *Numero ergo sum: competenze matematiche in una dimensione europea* fa riferimento:

- a ricerche nazionali e internazionali in didattica della matematica, che hanno come focus il ruolo del linguaggio nell'insegnamento-apprendimento della matematica (Ferrari, 2004a, 2004b) e l'importanza delle rappresentazioni semiotiche (Duval, 2006);
- al concetto di *competenza matematica*, intesa come somma di parti (Levati e Saraò, 1998), come performance (Spencer e Spencer, 1995) e come mobilitazione efficace di fronte alla risoluzione di problemi (Le Boterf, 1994);
- al quadro teorico OCSE-PISA (Niss, 2003; Quadro di riferimento PISA 2012 per la matematica). In particolare, ci riferiamo a quelle che, nel quadro OCSE-PISA, sono indicate come capacità fondamentali<sup>2</sup> di *rappresentazione e comunicazione*;
- a ricerche nazionali e internazionali in didattica della matematica, sull'*atteggiamento* degli studenti nei confronti della matematica (Zan e Di Martino, 2004).

<sup>2</sup> Le *capacità fondamentali*, nel quadro di riferimento di PISA 2012, sono da considerarsi competenze, in quanto traduzione del termine *competencies*, usato da Niss nel suo articolo del 2003.

#### 4.1. Il ruolo del linguaggio

Molte ricerche nell'ambito della didattica della matematica hanno evidenziato come le difficoltà di apprendimento in matematica possano essere legate alla carenza di competenze linguistiche (Ferrari, 2004).

Quando si parla di linguaggio matematico, si è portati a pensare al formalismo matematico. Tuttavia, il linguaggio verbale è ampiamente utilizzato nelle attività matematiche. Dunque, i problemi relativi al linguaggio, nell'apprendimento della matematica, non riguardano solo il linguaggio simbolico, ma devono essere considerati in una prospettiva più ampia. In questa prospettiva i processi di comunicazione e lo sviluppo del pensiero risultano fortemente collegati (Ferrari, 2004).

Tra le teorie che riservano un ruolo centrale alla comunicazione in matematica ci sono quelle che interpretano la "matematica come discorso" (Sfard, 2001). Il pensiero matematico è interpretato come comunicazione e il linguaggio non è portatore di significati pre-esistenti, ma costruttore dei significati stessi. Secondo tale punto di vista, che si rifà al pensiero vygotkiano (Vygotskij, 1992), è il linguaggio che influenza il pensiero. Ed è per questo motivo che è fondamentale educare gli studenti ad argomentare (attraverso il linguaggio sia scritto sia orale) i processi messi in atto durante lo svolgimento di un'attività matematica.

Il principio basilare dell'approccio comunicativo allo studio della cognizione umana è che il pensiero può essere concettualizzato come un caso di comunicazione, vale a dire come comunicazione con se stessi. Infatti, il nostro pensiero è chiaramente uno sforzo dialogico con il quale informiamo noi stessi, discutiamo, poniamo domande, e aspettiamo la nostra risposta. La concettualizzazione del pensiero come comunicazione è una conseguenza

quasi inevitabile della tesi delle origini intrinsecamente sociali di tutte le attività umane. Chiunque creda, come Vygotskij, nella priorità evolutiva del discorso comunicativo pubblico sul discorso interiore privato (per es. Vygotskij, 1987) deve anche ammettere che sia che si consideri la filogenesi, sia l'ontogenesi, il pensiero sorge come versione privata modificata della comunicazione interpersonale (Sfard, 2001, p. 26; trad. in Ferrari, 2004b).

L'attività matematica, con il suo linguaggio, è caratterizzata da una dominante importanza delle rappresentazioni semiotiche e dalla loro grande varietà. Alcuni autori, come Duval (2006), ne sottolineano il ruolo fondamentale nell'apprendimento della matematica. A differenza di ciò che accade in altre discipline, gli oggetti matematici non sono accessibili direttamente tramite la percezione, ma ciò che è possibile osservare e manipolare sono le loro rappresentazioni nei diversi sistemi semiotici. Pertanto, per supportare la comprensione di concetti matematici, è fondamentale la capacità di saper passare da una rappresentazione a un'altra. Secondo Duval, la comprensione di un concetto in matematica presuppone il coordinamento di più (almeno due) registri di rappresentazione semiotica. Le attività fondamentali, riguardanti le rappresentazioni semiotiche, sono di due tipi: il *trattamento* e la *conversione*.

Il trattamento consiste in trasformazioni sulle rappresentazioni all'interno di uno stesso registro semiotico, per esempio, il calcolo algebrico, le riconfigurazioni figurali e così via. La conversione, invece, consiste nel passaggio da una rappresentazione in un registro semiotico a una in un altro registro semiotico, senza che l'oggetto in questione cambi. Si pensi, per esempio, al passaggio dall'espressione algebrica di una funzione al suo grafico, al passaggio da una tabella a un istogramma e così via.

I trattamenti che possono essere effettuati dipendono dal registro semiotico di rappresentazione usato. Uno dei criteri di scelta di un registro semiotico rispetto a un altro è proprio la potenza dei trattamenti che esso permette di fare (Duval, in D'Amore *et al.*, 2013). La conversione, dal punto di vista matematico, ha lo scopo di scegliere un registro semiotico in cui il trattamento possa risultare più efficiente e non può essere ridotta essa stessa a un trattamento. Dal punto di vista cognitivo, invece, la conversione stimola la comprensione profonda dei concetti matematici. Infatti, due rappresentazioni distinte di uno stesso oggetto, in generale, non hanno lo stesso contenuto. Dunque, il coordinamento dei registri semiotici, ovvero la capacità di gestire più rappresentazioni di uno stesso concetto e di saper passare dall'una all'altra, è una condizione necessaria per raggiungere la capacità di non identificare un concetto con una delle sue rappresentazioni. Tale capacità è fondamentale per la comprensione in matematica e, inoltre, non è naturale negli studenti, ma va stimolata e supportata (Albano *et al.*, 2012).

Le attività elaborate dal gruppo di ricerca durante il progetto sono in accordo con queste teorie. Esse sono state pensate, infatti, per dare grande importanza e supportare la gestione di registri semiotici differenti, le conversioni tra diverse rappresentazioni semiotiche e il trattamento all'interno di una stessa rappresentazione.

Inoltre, il traguardo formativo è favorire il potenziamento di competenze argomentative in matematica e, in particolare, la produzione di testi scritti, in accordo con Morgan (1998), che sostiene l'importanza dello scrivere per imparare. La differenza tra linguaggio orale e linguaggio scritto, infatti, non riguarda solo l'organizzazione linguistica dei testi, ma mette in gioco diverse funzioni cognitive (Ferrari, 2004a; Duval, 2000).